Optimale Steuerung der linearen DAE im Fall Index 2

André Backes

Zusammenfassung

Es wird eine notwendige Optimalitäts-Bedingung für das linear-quadratische Optimierungsproblem mit differentiell-algebraischen Gleichungen im Fall Index 2 bewiesen. Im ersten Schritt wird die kausale DAE betrachtet. Im zweiten Schritt wird ein neuer Lösungs-Begriff für nicht-kausale DAEs eingeführt und ein spezielles Kostenfunktional betrachtet, welches für stetige Steuer-Funktionen nur den stetigen Teil der Zustands-Variablen bewertet. Es stellt sich heraus, dass die adjungierte Gleichung dann kausal ist und somit eine stetige Lösung besitzt. Es wird die erweiterte Hessenberg-Form für DAEs eingeführt, die es unter anderem ermöglicht, Beziehungen der DAE zu ihrer adjungierten Gleichung im Optimierungs-Problem einfacher zu untersuchen.

1 Das linear-quadratische Optimierungs-Problem für DAEs

Auf dem Zeit-Intervall $[t_0, T]$ betrachten wir für die lineare gesteuerte DAE (Differential Algebraic Equation) das Anfangswert-Problem

$$(AWP) \qquad \begin{cases} A(Dx)' + Bx = Cu \\ D(t_0)P_1(t_0)(x(t_0) - x^0) = 0 \end{cases} \tag{1.1}$$

mit festem $x^0 \in \mathbb{R}^m$.

Die Glattheits-Eigenschaften der Zustands-Variablen $x : [t_0, T] \to \mathbb{R}^m$ und der Steuer-Funktion $u : [t_0, T] \to \mathcal{U} := \mathbb{R}^k$ werden wir im Weiteren noch genauer untersuchen. Die Koeffizienten der gesteuerten DAE seien stetige Matrix-Funktionen $A \in C([t_0, T], \mathbb{R}^{m \times n})$, $D \in C([t_0, T], \mathbb{R}^{n \times m})$,

$B \in C([t_0,T],\mathbb{R}^{m\times m})$ und $C \in C([t_0,T],\mathbb{R}^{m\times k})$.
Die DAE sei im Sinne von [Mä2] eine reguläre DAE mit Index μ und proper formuliertem Hauptterm. Wir benutzen hier die Matrizen, Mengen und Projektoren der in [Mä2] definierten Matrix-Kette und betrachten im Wesentlichen den Fall $\mu = 2$. Die Matrix $D(t_0)P_1(t_0)$ in (1.1) filtert aus dem gegebenen Anfangswert x^0 den zugehörigen Anfangswert für die inhärente gewöhnliche Differentialgleichung (ODE) der DAE heraus.

Weiter betrachten wir ein zu minimierendes quadratisches
Kosten-Funktional J mit

$$J(u) \quad = \quad \frac{1}{2}x^T(T)Vx(T) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{T} \left\{x^TWx + 2x^TSu + u^TKu\right\}\, dt \qquad (1.2)$$

für eine gegebene Steuer-Funktion $u : [t_0,T] \to \mathcal{U} = \mathbb{R}^k$.

Dabei seien die Matrix $V \in \mathbb{R}^{m\times m}$ und die stetigen Matrix-Funktionen
$W \in C([t_0,T],\mathbb{R}^{m\times m})$, $S \in C([t_0,T],\mathbb{R}^{m\times k})$ und $K \in C([t_0,T],\mathbb{R}^{k\times k})$,
gegeben mit $V^T = V$, $W^T(t) = W(t)$ und $K^T(t) = K(t)$ für alle $t \in [t_0,T]$.

Die Matrizen V und $\begin{pmatrix} W(t) & S(t) \\ S^T(t) & K(t) \end{pmatrix}$, $t \in [t_0,T]$, seien positiv semidefinit.

Zusammenfassend betrachten wir also das Optimierungs-Problem

$$(OP) \qquad \begin{cases} J(u) = \frac{1}{2}x^T(T)Vx(T) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}\left\{x^TWx + 2x^TSu + u^TKu\right\}\, dt \to \text{Min} \\[2ex] A(Dx)' + Bx = Cu, \quad D(t_0)P_1(t_0)(x(t_0) - x^0) = 0 \\[2ex] u(t) \in \mathcal{U} \quad , \quad t \in [t_0,T] \end{cases}$$

Dabei betrachten wir den Fall eines festen Zeitintervalls $[t_0,T]$, das heißt, der End-Zeitpunkt T stellt keine zu optimierende Größe dar. Außerdem sei der Werte-Bereich der Steuer-Funktion keinen Beschränkungen unterworfen, das heißt, wir betrachten hier ausschließlich den Fall $\mathcal{U} = \mathbb{R}^k$.

Das Optimierungs-Problem wurde in [Cobb], [BeLa], [Jo] und [Me] für den zeitinvarianten Fall untersucht und in [KuMe1] für den zeitabhängigen Fall. In [Cobb], [BeLa] und [Jo] wird zur Analyse bzw. zur Klassifizierung der

betrachteten DAE kein Index-Begriff benutzt und deren Untersuchungen betrachten daher einen verallgemeinerten distributionellen Lösungsbegriff für die DAE.
[Cobb] betrachtet die lineare DAE mit konstanten Koeffizienten mit einem speziellen quadratischen Kosten-Funktional bei unendlichem Zeit-Intervall. Ein wichtiges Ergebnis bei [Cobb] ist, dass eine Steuer-Funktion $u(t)$, die zu einer distributionellen Lösung $x(t)$ mit Impulsen führt, keine optimale Steuerung sein kann, da hier $J(u) = \infty$ gelten muss.
[Jo] betrachtet den allgemeineren Fall einer impliziten zeitinvarianten Differentialgleichung mit einem Kosten-Funktional in Integral-Form. Er gibt eine notwendige Optimalitäts-Bedingung an, die im Wesentlichen der von uns in dieser Arbeit betrachteten und bewiesenen Optimalitäts-Bedingung entspricht. [Jo] setzt jedoch die Existenz der impulsfreien Lösungen der DAE und ihrer adjungierten DAE voraus und behandelt mit dieser Einschränkung somit im Allgemeinen quasi den Fall Index 1.
[BeLa] zitiert die notwendige Optimalitäts-Bedingung aus [Jo] sowie deren Beweis und untersucht den speziellen Fall des linear-quadratischen Optimierungs-Problems.
[Me] und [KuMe1] beweisen die notwendige Optimalitäts-Bedingung für den Fall Index 1 und transformieren in Fällen von höherem Index die DAE auf den Fall Index 1, sofern dies möglich ist. In [Me] wird zum Beispiel gezeigt, dass gewisse kontrolltheoretische Eigenschaften der zeitinvarianten DAE wie starke Stabilisierbarkeit und starke Entdeckbarkeit hinreichend dafür sind, dass man durch lineare Zustandsrückführung eine DAE mit Index 1 erhalten kann.
In [KuMä] wird eine hinreichende Optimalitats-Bedingung für das linear-quadratische Optimierungs-Problem angegeben. Unser Ziel ist es, zu untersuchen, wann diese hinreichende Bedingung notwendig ist. Wir betrachten hier den Fall einer DAE vom Index 2 direkt, ohne auf Index 1 zu transformieren.

In Abschnitt 2 betrachten wir die speziellen Eigenschaften einer kausalen gesteuerten DAE.
In Abschnitt 3 beweisen wir mit dem klassischen Variations-Ansatz (z.B. [He]) eine notwendige Optimalitäts-Bedingung für das Optimierungs-Problem mit kausaler DAE im Fall Index 2. Dabei setzen wir zunächst die Kausalität der adjungierten DAE voraus.
In Abschnitt 4 führen wir die DAE in erweiterter Hessenberg-Form ein und

zeigen, wie wir eine beliebige DAE auf diese Form transformieren können.
In Abschnitt 5 untersuchen wir, wie sich die Transformation in Abschnitt 4 auf das gesamte Optimierungs-Problem auswirkt.
In Abschnitt 6 betrachten wir eine beliebige im Allgemeinen nicht-kausale DAE und ein spezielles Kosten-Funktional, welches bei stetiger Steuer-Funktion nur die stetige Komponente der Zustandsvariablen bewertet. Wir können zeigen, dass hier bereits die Kausalität der adjungierten DAE erfüllt ist. Dazu betrachten wir die DAE in erweiterter Hessenberg-Form, für die man diese Tatsache explizit ausrechnen kann.
In Abschnitt 7 betrachten wir die DAE im Randwert-Problem der notwendigen Optimalitäts-Bedingung und untersuchen die Frage nach deren Index.

2 Die kausale gesteuerte DAE

Für die genaue Charakterisierung der Glattheits-Eigenschaften von Steuer-Funktion und Zustandsvariable benutzen wir die auch in benutzte [Mä2] Abkürzung

$$C^1_M([t_0,T],\mathbb{R}^n) := \{f \in C([t_0,T],\mathbb{R}^m) \mid Mf \in C^1([t_0,T],\mathbb{R}^n)\} \tag{2.1}$$

für eine stetige Matrix-Funktion $M \in C([t_0,T],\mathbb{R}^{n\times m})$.

Für die Lösung des Anfangswert-Problems (AWP) haben wir aus [Mä1] für den Fall Index 2 folgenden Existenzsatz:

Satz 1 *(Lösung der DAE im Fall Index 2)*
Die DAE habe Index 2 und es seien $DP_1D^-, DQ_1D^- \in C^1([t_0,T],\mathbb{R}^{n\times n})$. Dann besitzt das Anfangswert-Problem (AWP) für jede Steuer-Funktion

$$u \in C^1_{DQ_1G_2^{-1}C}([t_0,T],\mathbb{R}^k) \tag{2.2}$$

eine eindeutige Lösung

$$x \in C^1_D([t_0,T],\mathbb{R}^m) \tag{2.3}$$

und es gilt die Abschätzung

$$\begin{aligned} &\|x\|_\infty + \|(Dx)'\|_\infty \\ &\le L\left(\|D(t_0)P_1(t_0)x^0\| + \|Cu\|_\infty + \|(DQ_1G_2^{-1}Cu)'\|_\infty\right) \end{aligned} \tag{2.4}$$

mit einer Konstanten L.

Der Wunsch, für jede stetige Steuer-Funktion eine Lösung in $C^1_D([t_0,T],\mathbb{R}^m)$ zu erhalten, führt uns zur Betrachtung einer kausalen DAE ([Mue],[RouVal]):

Definition 1 *Eine gesteuerte DAE heißt kausal, wenn für jede Steuer-Funktion $u : [t_0,T] \to \mathcal{U}$ der Wert $x(t)$ der Zustandsvariablen zu jedem Zeitpunkt $t \in [t_0,T]$ nur vom Wert $u(t)$ der Steuer-Funktion abhängt und nicht zusätzlich von den Ableitungen $u^{(i)}(t)$, $i \in \mathbb{N}$.*

In [Mue] wird bereits vorgeschlagen, bei der Behandlung von optimalen Steuerproblemen mit zeitinvarianten DAEs die kausalen und nicht-kausalen Systeme zu unterscheiden. [RouVal] betrachtet die Klasse der kausalen DAEs auch im zeitabhängigen Fall.
Die regelungstechnische Sichtweise, dass der Wert $x(t)$ tatsächlich nur vom gegenwärtigen Wert $u(t)$ abhängt und nicht vom Änderungsverhalten der Steuer-Funktion beeinflusst wird, bedeutet aus analytischer Sicht, dass die Funktion $u(t)$ tatsächlich nur stetig sein muss, um eine ebenfalls stetige Zustandsfunktion $x(t)$ zu erhalten.

Im Fall Index 1 ist jede gesteuerte DAE kausal, da hier die Lösung nicht von den Ableitungen der rechten Seite abhängt. Im Fall Index 2 haben wir aus [Mä2] eine Entkopplung der DAE in der Form

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{z} &=& (DP_1D^-)'z - DP_1G_2^{-1}BD^-z + DP_1G_2^{-1}Cu \\ x &=& K_2D^-z + (P_0Q_1 + Q_0P_1)G_2^{-1}Cu + Q_0Q_1D^-(DQ_1G_2^{-1}Cu)' \end{array} \right. \tag{2.5}$$

mit $K_2 := I - Q_0Q_1D^-(DQ_1D^-)'D - Q_0P_1G_2^{-1}BP_0$.

Dabei ist $z := DP_1x$ hier die Variable der inhärenten gewöhnlichen Differentialgleichung (ODE). An der Entkopplung (2.5) kann der zu differenzierende Teil der rechten Seite der DAE direkt abgelesen werden und daraus ergibt sich die folgende Kausalitäts-Bedingung:

Satz 2 *Eine gesteuerte DAE mit Index 2 ist genau dann kausal, wenn die Kausalitäts-Bedingung*

$$DQ_1G_2^{-1}C = 0 \tag{2.6}$$

erfüllt ist.

Durch die Kausalitäts-Bedingung (2.6) wird auch die Bedingung (2.2) für die Steuer-Funktion u verständlich, die die stetige Lösbarkeit der allgemeinen DAE garantiert.
Die Eigenschaft der Kausalität der DAE lässt sich somit im Wesentlichen über die entsprechende Wahl der Koeffizienten-Matrix C steuern.
Für eine solche kausale DAE mit Index 2 haben wir dann den folgenden modifizierten Existenzsatz:

Satz 3 *(Lösung der kausalen DAE im Fall Index 2)*
Die DAE habe Index 2, sei kausal und es seien
$DP_1D^-, DQ_1D^- \in C^1([t_0,T],\mathbb{R}^{n\times n})$.
Dann besitzt das Anfangswert-Problem (AWP) *für jede Steuer-Funktion*

$$u \in C([t_0,T],\mathbb{R}^k) \tag{2.7}$$

eine eindeutige Lösung

$$x \in C^1_D([t_0,T],\mathbb{R}^m) \tag{2.8}$$

und es gilt die Abschätzung

$$\|x\|_\infty \le L\left(\|D(t_0)P_1(t_0)x^0\| + \|Cu\|_\infty\right) \tag{2.9}$$

mit einer Konstanten L.

Die Zustandsvariable lässt sich im Fall Index 2 in die Komponenten

$$\begin{aligned} x &= P_0x + Q_0x \\ &= P_0P_1x + P_0Q_1x + Q_0x \\ &= D^-DP_1x + D^-DQ_1x + Q_0x \end{aligned} \tag{2.10}$$

zerlegen. Dabei erhalten wir aus der Entkopplung (2.5) die Beziehung

$$DQ_1x = DQ_1G_2^{-1}Cu \tag{2.11}$$

Im Fall der kausalen DAE folgt also aus der Eigenschaft (2.6), dass sich die Zustandsvariable auf folgende Komponenten reduziert:

$$\begin{aligned} x &= P_0P_1x + Q_0x = D^-DP_1x + Q_0x \\ Dx &= DP_1x + \underbrace{DQ_0}_{=0}x = DP_1x\,. \end{aligned} \tag{2.12}$$

3 Eine notwendige Optimalitäts-Bedingung bei kausaler DAE

Die gesteuerte DAE habe nun Index 2 und sei kausal. Im Hinblick auf eine notwendige Optimalitäts-Bedingung für das Optimierungs-Problem (OP) gehen wir von einer optimalen Steuerung $u_* \in C([t_0, T], \mathbb{R}^k)$ aus, die das Funktional J minimiert. Wir werden zeigen, dass die Gâteaux-Ableitung von J an der Stelle u_* existiert, das heißt, für alle Richtungen $\delta u \in C([t_0, T], \mathbb{R}^k)$ existiert die Richtungs-Ableitung

$$\delta J(u_*, \delta u) := \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\epsilon} \left(J(u_* + \epsilon \delta u) - J(u_*) \right) \tag{3.1}$$

und muss wegen der Optimalitäts-Eigenschaft von u_* verschwinden. Wir untersuchen, welche notwendigen Bedingungen hieraus für u_* folgen.

Variation der optimalen Steuerung

Es sei $x_* \in C_D^1([t_0, T], \mathbb{R}^m)$ die zu u_* gehörige Lösung der DAE und damit optimale Trajektorie.
Weiter sei $\delta u \in C([t_0, T], \mathbb{R}^k)$ eine Variation von u_* und sei $\delta x \in C_D^1([t_0, T], \mathbb{R}^m)$ die zugehörige Variation der optimalen Trajektorie als Lösung von

$$\begin{cases} A(D\delta x)' + B\delta x = C\delta u \\ D(t_0)P_1(t_0)\delta x(t_0) = 0. \end{cases} \tag{3.2}$$

Dann gilt

$$\begin{cases} A\left(D(x + \delta x)\right)' + B(x + \delta x) = C(u + \delta u) \\ D(t_0)P_1(t_0)(x(t_0) + \delta x(t_0) - x^0) = 0 \end{cases} \tag{3.3}$$

und wir haben die Abschätzung

$$\|\delta x\|_\infty \leq L\|C\delta u\|_\infty \leq L\|C\| \, \|\delta u\|_\infty =: \tilde{L}\|\delta u\|_\infty. \tag{3.4}$$

Das bedeutet, eine kleine Variation der Steuer-Funktion hat auch eine kleine Variation der Zustands-Funktion zur Folge. Daraus folgt auch die Existenz der Gâteaux-Ableitung und somit die notwendige Bedingung

$$\delta J(u_*, \delta u) = 0\,. \tag{3.5}$$

Langrange-Parameter

Als bekanntes Hilfsmittel aus der Optimierung mit Nebenbedingungen führen wir nun Lagrange-Parameter $\lambda(t) \in \mathbb{R}^m$ ein und betrachten die Hamilton-Funktion, durch die das zu minimierende Funktional über die Ko-Zustandsvariable λ mit der DAE verknüpft wird:

$$H(x, \lambda, u, t) := -\frac{1}{2}x^T W x - x^T S u - \frac{1}{2}u^T K u + \lambda^T(-Bx + Cu). \tag{3.6}$$

Wir setzen außerdem $F(x(T)) := \frac{1}{2}x^T(T)Vx(T)$ und können nun mit Hilfe der Hamilton-Funktion das Funktional J anders darstellen und zwar in der Form

$$J(u) = F(x(T)) + \int_{t_0}^{T} \left\{\lambda^T A(Dx)' - H(x, \lambda, u, t)\right\} dt. \tag{3.7}$$

Berechnung der Gâteaux-Ableitung

Wir betrachten zunächst die Differenz $J(u_* + \delta u) - J(u_*)$ und erhalten mit dem Satz von Taylor

$$\begin{aligned}
\Delta J &= J(u_* + \delta u) - J(u_*) \\
&= F(x_*(T) + \delta x(T)) - F(x_*(T)) \\
&\quad + \int_{t_0}^{T} \left\{\lambda^T A(D(x_* + \delta x))' - \lambda^T A(Dx_*)'\right\} dt \\
&\quad - \int_{t_0}^{T} \{H(x_* + \delta x, \lambda, u_* + \delta u, t) - H(x_*, \lambda, u_*, t)\} dt \\
&= F_x(x_*(T))\delta x(T) + \int_{t_0}^{T} \left\{\lambda^T A(D\delta x)' - H_x \delta x - H_u \delta u\right\} dt + o(\|\delta u\|_\infty).
\end{aligned}$$

Dabei benutzen wir die Abkürzungen

$$\begin{aligned}
H_x &:= H_x(x_*, \lambda, u_*, t) = -x_*^T W - u_*^T S - \lambda^T B \\
H_u &:= H_u(x_*, \lambda, u_*, t) = -x_*^T S + \lambda^T C - u_*^T K.
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Von der zunächst willkürlich eingeführten Funktion $\lambda(t)$ fordern wir nun $\lambda \in C^1_{A^T}([t_0, T], \mathbb{R}^m)$, und können dann mit partieller Integration den Term

$$\int_{t_0}^{T} \lambda^T A(D\delta x)'\, dt = \left[\lambda^T A D \delta x\right]_{t_0}^{T} - \int_{t_0}^{T} (\lambda^T A)' D\delta x\, dt \tag{3.9}$$

anders schreiben. Damit haben wir

$$\begin{aligned} \Delta J &= F_x(x_*(T))\delta(T) + \left[\lambda^T A D\delta x\right]_{t_0}^T \\ &\quad - \int\limits_{t_0}^{T} \left\{(\lambda^T A)' D\delta x + H_x \delta x + H_u \delta u\right\} \, dt + o(\|\delta u\|_\infty). \end{aligned} \tag{3.10}$$

Zur Grenzwertbildung benötigen wir nun die Eigenschaft

$$\|\delta u\|_\infty < \epsilon \quad \Longrightarrow \quad \|\delta x\|_\infty < \epsilon \tilde{L}\,, \tag{3.11}$$

die aus der Abschätzung (3.4) folgt. Außerdem brauchen wir die Eigenschaft

$$D(t_0)\delta x(t_0) = D(t_0)P_1(t_0)\delta x(t_0) = 0, \tag{3.12}$$

die wir hier wegen der Kausalität der gesteuerten DAE nach (3.2) und (2.12) haben. Für $\epsilon \to 0$ haben wir also

$$\begin{aligned} \delta J(u_*, \delta u) &= \big(F_x(x(T)) + \lambda^T(T)A(T)D(T)\big)\, \delta x(T) \\ &\quad - \int_{t_0}^T H_u \delta u \, dt - \int_{t_0}^T \{H_x + (\lambda^T A)' D\} \delta x \, dt. \end{aligned} \tag{3.13}$$

<u>Notwendige Optimalitäts-Bedingung</u>

Aus der notwendigen Bedingung (3.5) wollen wir nun eine Bedingung für H_u folgern. Dabei können wir noch die Freiheit in der Wahl von $\lambda(t)$ ausnutzen. Unter der Voraussetzung, dass wir λ_* als Lösung des Endwert-Problems

$$(EWP) \qquad \left\{ \begin{array}{l} D^T(A^T\lambda)' = -H_x^T(x_*, \lambda, u_*, t) = B^T\lambda + Wx_* + Su_* \\ D^T(T)A^T(T)\lambda(T) = -F_x^T(x_*(T)) = -Vx_*(T) \end{array} \right. \tag{3.14}$$

wählen können, erhalten wir aus (3.13)

$$\delta J(u_*, \delta u) = -\int_{t_0}^T H_u \delta u \, dt. \tag{3.15}$$

Mit dem Fundamental-Lemma der Variations-Rechnung (siehe zum Beispiel [He]) folgt aus (3.5) somit die Bedingung

$$H_u^T(x_*, \lambda, u_*, t) = -S^T x_* + C^T \lambda_* - K u_* = 0. \tag{3.16}$$

Schreiben wir die gesteuerte DAE in der äquivalenten Form

$$A(Dx)' = -H_\lambda^T(x, u, \lambda, t), \tag{3.17}$$

so erhalten wir insgesamt für das Tripel (x, λ, u) das System

$$\left\{ \begin{array}{rcl} A(Dx)' & = & H_\lambda^T(x, \lambda, u, t) \\ D^T(A^T\lambda)' & = & -H_x^T(x, \lambda, u, t) \\ 0 & = & H_u^T(x, \lambda, u, t)\,, \end{array} \right. \tag{3.18}$$

dessen rechte Seite sich ausschliesslich mit der Hamilton-Funktion darstellen lässt. Auf diese Weise entpuppt sich die Hamilton-Funktion als elegantes Hilfmittel zur Formulierung der notwendigen Optimalitäts-Bedingung, dessen Beweis wir nun abschließen wollen:

Das Endwert-Problem für die kausale adjungierte DAE

Die DAE im Endwert-Problem (EWP) für die adjungierte Variable λ ist die sogenannte adjungierte DAE

$$D^T(A^T\lambda)' - B^T\lambda = Wx + Su. \tag{3.19}$$

In [BaMä] wurden die Beziehungen zwischen einer DAE und ihrer adjungierten Gleichung untersucht im Fall Index $\mu \leq 2$. Daher wissen wir, dass die DAE (3.19) ebenfalls Index 2 hat, wenn dies für die gesteuerte DAE der Fall ist. In der Matrix-Kette zur Analyse der adjungierten DAE verwenden wir die Bezeichnungen G_{*0}, Q_{*0}, P_{*0}, ... neben G_0, Q_0, P_0, ... für die gesteuerte DAE.

Es bleibt zu untersuchen, wann die adjungierte Variable $\lambda(t)$ als Lösung des Endwert-Problems (EWP) gewählt werden kann. Dazu setzen wir im ersten Ansatz voraus, die Matrizen W und S des Kostenfunktionals seien so gewählt, dass die Lösung $\lambda(t)$ nicht von der Ableitung der rechten Seite $Wx + Su$ zum Zeitpunkt t abhängt. Im Sinne der Definition 1 für die Kausalität der gesteuerten DAE bezeichnen wir diese Eigenschaft ebenfalls als Kausalität der adjungierten DAE. Die zu (2.6) äquivalente Kausalitäts-Bedingung für die adjungierte DAE (3.19) lautet daher

$$A^T Q_{*1} G_{*2}^{-1}(W, S) = 0. \tag{3.20}$$

Es gilt dann auch hier analog zu den Eigenschaften der kausalen DAE

$$A^T Q_{*1}\lambda = A^T Q_{*1} G_{*2}^{-1}(W, S) \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} = 0$$

und somit

$$\begin{aligned}
\lambda &= P_{*0}\lambda + Q_{*0}\lambda \\
&= P_{*0}P_{*1}\lambda + P_{*0}Q_{*1}\lambda + Q_{*0}\lambda \\
&= (A^T)^- A^T P_{*1}\lambda + (A^T)^- A^T Q_{*1}\lambda + Q_{*0}\lambda \\
&= (A^T)^- A^T P_{*1}\lambda + Q_{*0}\lambda \qquad (3.21) \\
A^T\lambda &= A^T P_{*1}\lambda + \underbrace{A^T Q_{*0}}_{=0}\lambda = A^T P_{*1}\lambda.
\end{aligned}$$

Es gilt nun für $\lambda_T \in \mathbb{R}^m$

$$\begin{aligned}
& A^T(T)P_{*1}(T)(\lambda(T) - \lambda_T) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & A^T(T)P_{*1}(T)\lambda(T) = A^T(T)P_{*1}(T)\lambda_T \qquad (3.22) \\
\Rightarrow\ & D^T(T)A^T(T)\lambda(T) = D^T(T)A^T(T)P_{*1}(T)\lambda_T
\end{aligned}$$

Setzen wir nun

$$im\, V \subset im\, D^T(T)A^T(T)P_{*1}(T) \qquad (3.23)$$

voraus, so lässt sich λ_T derart wählen, dass

$$D^T(T)A^T(T)P_{*1}(T)\lambda_T = -Vx_*(T) \qquad (3.24)$$

gilt, so dass die End-Bedingung für λ erfüllt ist.

Wir wollen die Bedingung (3.23) an das Bild von V in einer Form schreiben, die keinen Projektor aus der Matrixkette der adjungierten DAE benutzt. Dazu verwenden wir die in [BaMä] bewiesene Eigenschaft

$$(DP_1D^-)^T = A^T P_{*1}(A^T)^-. \qquad (3.25)$$

Damit gilt dann wegen $\operatorname{im} A^T P_{*1}(A^T)^- = \operatorname{im} A^T P_{*1}$

$$\begin{aligned}
\operatorname{im} D^T A^T P_{*1} &= \operatorname{im} D^T A^T P_{*1}(A^T)^- = \operatorname{im} D^T (DP_1D^-)^T \\
&= \operatorname{im} D^T (D^-)^T P_1^T D^T = \operatorname{im} P_0^T P_1^T D^T \qquad (3.26) \\
&= \operatorname{im} (DP_1P_0)^T = (\ker DP_1P_0)^\perp = (N_0 \oplus N_1)^\perp.
\end{aligned}$$

Wir erhalten somit an die Matrix V die Bedingung

$$Vz = 0 \quad \text{für alle} \quad z \in N_0(T) \oplus N_1(T). \tag{3.27}$$

Für entsprechende Projektoren Q_0, P_0 und P_1 bedeutet diese Bedingung

$$V(P_0(T)Q_1(T) + Q_0(T)) = 0. \tag{3.28}$$

Diese Bedingung bedeutet, dass durch die Matrix V von der Zustands-Variablen zum Zeitpunkt $t = T$ nur die Komponente der inhärenten ODE bewertet wird.

<u>Satz zur notwendigen Optimalitäts-Bedingung</u>

Wir haben schließlich zunächst folgenden Satz bewiesen:

Satz 4 *Die Matrizen C, W und S im Optimierungs-Problem seien so gewählt, dass die DAE sowie ihre adjungierte DAE beide kausal sind. Die Matrix V sei ferner so gewählt, dass $Vz = 0$ für alle $z \in N_0 \oplus N_1$ gilt.*

Sei nun $u_* \in C([t_0, T], \mathbb{R}^k)$ optimale Steuerung und $x_* \in C^1_D([t_0, T], \mathbb{R}^m)$ zugehörige optimale Trajektorie. Dann existiert eine Funktion

$$\lambda_* \in C^1_{A^T}([t_0, T], \mathbb{R}^m), \tag{3.29}$$

so dass (x_*, λ_*, u_*) eine Lösung des Randwertproblems

$$(RWP) \quad \left\{ \begin{array}{rcl} A(Dx)' & = & -Bx + Cu \\ D^T(A^T\lambda)' & = & Wx + B^T\lambda + Su \\ 0 & = & S^Tx - C^T\lambda + Ku \\ & & \\ D(t_0)P_1(t_0)(x(t_0) - x^0) & = & 0 \\ D^T(T)A^T(T)\lambda(T) & = & -Vx(T) \end{array} \right. \tag{3.30}$$

ist.

Diese notwendige Optimalitats-Bedingung ist nach [Mä3] unter sogar schwächeren Voraussetzungen eine hinreichende Bedingung für eine optimale Steuerung. Es gilt der Satz

Satz 5 *Es seien* $x_* : [t_0, T] \to \mathbb{R}^m$, $\lambda_* : [t_0, T] \to \mathbb{R}^m$ *und* $u_* : [t_0, T] \to \mathbb{R}^k$ *so gegeben, dass das Tripel* (x_*, λ_*, u_*) *Lösung des Randwert-Problems*

$$(RWP) \quad \left\{ \begin{array}{rcl} A(Dx)' & = & -Bx + Cu \\ D^T(A^T\lambda)' & = & Wx + B^T\lambda + Su \\ 0 & = & S^Tx - C^T\lambda + Ku \\ & & \\ D(t_0)P_1(t_0)(x(t_0) - x^0) & = & 0 \\ D^T(T)A^T(T)\lambda(T) & = & -Vx(T) \end{array} \right. \tag{3.31}$$

ist. Dann ist u_* *optimale Steuerung.*

Im Folgenden wird es darum gehen, die Voraussetzungen von Satz 4 zu verallgemeinern bzw. genauer zu charakterisieren und zwar im Hinblick auf die Kausalität der DAE und ihrer adjungierten DAE sowie auf die Wahl der Matrizen W und S im quadratischen Kosten-Funktional.

4 Die DAE in erweiterter Hessenberg-Form

Wir betrachten hier eine allgemeine reguläre DAE

$$A(Dx)' + Bx = q \tag{4.1}$$

mit proper formuliertem Hauptterm und Index μ nach [Mä2] sowie einer rechten Seite $q : [t_0, T] \to \mathbb{R}^m$.

In [Mä2] wurde gezeigt, dass unter einer Transformation der DAE (4.1) und einer Refaktorisierung des Hauptterms der Index und die Regularität der DAE erhalten bleiben. Wir wollen diese beiden Transformationen benutzen, um die DAE in eine sogenannte erweiterte Hessenberg-Form zu transformieren. Diese Form ermöglicht uns ein einfaches Nachrechnen einiger Eigenschaften der DAE und ihrer adjungierten Gleichung im Hinblick auf die Untersuchung des Optimierungs-Problems.

Zunächst betrachten wir die in [Mä2] beschriebene Transformation und Refaktorisierung der DAE:

Transformation der DAE

Gegeben seien zwei stetige reguläre Transformations-Matrix-Funktionen $M, N \in C([t_0, T], \mathbb{R}^{m\times m})$ und wir setzen

$$\left\{\begin{array}{lcl} \tilde{A} & := & MA \\ \tilde{D} & := & DN \\ \tilde{B} & := & MBN. \end{array}\right. \tag{4.2}$$

Die Matrix M bewirkt sozusagen eine Skalierung der DAE, während die Matrix N eine Transformation der Variablen darstellt. Wir betrachten die transformierte Variable $y \in \mathbb{R}^m$ mit

$$\boxed{y := N^{-1}x \quad \Longleftrightarrow \quad x = Ny} \tag{4.3}$$

Nach den Ausführungen in [Mä2] besitzt dann die transformierte DAE

$$\tilde{A}(\tilde{D}x)' + \tilde{B}x = Mq \tag{4.4}$$

ebenfalls wieder einen proper formulierten Hauptterm und hat Index μ.

Eine Rücktransformation der transformierten DAE in die ursprüngliche DAE ist offensichtlich möglich durch die entsprechenden Transformations-Matrix-Funktionen $\tilde{M} := M^{-1}$ und $\tilde{N} := N^{-1}$.

Refaktorisierung der DAE

Es sei $R \in C^1([t_0, T], \mathbb{R}^{n\times n})$ der zum proper formulierten Hauptterm gehörige Projektor mit $\operatorname{im} R = \operatorname{im} D$, $\ker R = \ker A$ und sei

$$r := \operatorname{rang} A = \operatorname{rang} D = \operatorname{rang} AD = \operatorname{rang} R \tag{4.5}$$

der gemeinsame Rang der Matrizen A und D. Dann betrachten wir eine stetig differenzierbare Matrix-Funktion $H \in C^1([t_0, T], \mathbb{R}^{n\times r})$, die eine verallgemeinerte Inverse $H^- \in C^1([t_0, T], \mathbb{R}^{r\times n})$ besitzt mit

$$RHH^-R = R. \tag{4.6}$$

Damit schreiben wir für $x \in C_D^1([t_0, T], \mathbb{R}^m)$ den Hauptterm der DAE als

$$\begin{array}{rcl} A(Dx)' & = & A(RDx)' = A(RHH^-RDx)' \\ & = & AH(H^-Dx)' + A(RH)'H^-Dx. \end{array} \tag{4.7}$$

Daraus ergibt sich für die DAE die Transformation

$$\begin{cases} \tilde{A} & := & AH \\ \tilde{D} & := & H^- D \\ \tilde{B} & := & B + A(RH)' H^- D. \end{cases} \tag{4.8}$$

Nach den Ausführungen in [Mä2] besitzt dann die transformierte DAE

$$\tilde{A}(\tilde{D}x)' + \tilde{B}x = q \tag{4.9}$$

ebenfalls wieder einen proper formulierten Hauptterm und hat Index μ.

Wegen Eigenschaft (4.6) ist unter anderem die Matrix G_0 invariant unter der Refaktorisierung des Hauptterms. Es ist

$$\tilde{G}_0 = \tilde{A}\tilde{D} = AHH^- D = ARHH^- RD = ARD = AD = G_0. \tag{4.10}$$

Um zum ursprünglichen Hauptterm zu gelangen, kann die Refaktorisierung rückgängig gemacht werden durch eine entsprechende Refaktorisierung mit $\tilde{H} := H^- R$ und $\tilde{H}^- := RH$, denn es ist

$$\begin{array}{rcl} \tilde{A}\tilde{H} & = & AHH^- R = ARHH^- R = AR = A \\ \tilde{H}^- \tilde{D} & = & RHH^- D = RHH^- RD = RD = D. \end{array} \tag{4.11}$$

Bemerkung zur Bezeichnung: Im Folgenden versehen wir die Bezeichnung von Matrizen und Projektoren, die aus einer Transformation oder einer Refaktorisierung (oder beidem) einer DAE hervorgegangen sind, immer mit einer Tilde ($\tilde{A}$). Aus dem Zusammenhang ist immer klar, ob eine Transformation, Refaktorisierung oder beides gemeint ist.

Transformation auf die erweiterte Hessenberg-Form

Wir wollen nun die DAE (4.1) in drei Schritten auf eine erweiterte Hessenberg-Form transformieren. Im ersten Schritt führen wir eine Transformation und Refaktorisierung durch, um den Hauptterm auf eine kanonische Form zu bringen. Daran schließen sich noch zwei weitere Transformationen an, um für die Matrix B ebenfalls eine spezielle Form zu erhalten.

Lemma 1 *Die Matrix-Funktionen $M, N \in C([t_0, T], \mathbb{R}^{m\times m})$, $H \in C^1([t_0, T], \mathbb{R}^{n\times r})$ und $H^- \in C^1([t_0, T], \mathbb{R}^{r\times n})$ lassen sich so wählen, dass*

$$MAH = \begin{pmatrix} I_{r\times r} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \textit{und} \quad H^- DN = \begin{pmatrix} I_{r\times r} & 0 \end{pmatrix} \tag{4.12}$$

gilt.

Beweis:
Da die stetige Matrix-Funktion $G_0 = AD$ auf $[t_0, T]$ den konstanten Rang r hat, gibt es zunächst (siehe [KuMe2]) stetige reguläre Matrix-Funktionen $E, F \in C([t_0, T], \mathbb{R}^{m \times m})$ mit

$$EADF = \begin{pmatrix} I_{r\times r} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.13}$$

Da die Matrix-Funktion R stetig differenzierbar ist, können wir weiter $H \in C^1([t_0, T], \mathbb{R}^{n \times r})$ und $H^- \in C^1([t_0, T], \mathbb{R}^{r \times n})$ so wählen, dass

$$HH^- = R \tag{4.14}$$

gilt. Es ist dann auch $RHH^-R = R$ und wir haben

$$\begin{aligned} (EAH)(H^-DF) &= EARHH^-RDF \\ &= EARDF = EADF = \begin{pmatrix} I_{r\times r} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{4.15}$$

Daraus folgt

$$EAH = \begin{pmatrix} \hat{A} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad H^-DF = \begin{pmatrix} \hat{D} & 0 \end{pmatrix} \tag{4.16}$$

mit regulären Matrix-Funktionen $\hat{A}, \hat{D} \in C([t_0, T], \mathbb{R}^{r \times r})$.
Die beiden Matrizen $M, N \in C([t_0, T], \mathbb{R}^{m \times m})$ wählen wir nun als

$$M := \begin{pmatrix} \hat{A}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} E \quad \text{und} \quad N := F \begin{pmatrix} \hat{D}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.17}$$

und wir erhalten die gewünschte Transformation (4.12). □

Wir erhalten somit für die DAE die semi-implizite Form

$$\begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right]' + \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = q. \tag{4.18}$$

Dabei seien die Matrix-Funktionen B_{11}, B_{12}, B_{21} und B_{22} von entsprechend passender Dimension. Die rechte Seite q sei hier und im Folgenden natürlich auch jeweils die neue transformierte rechte Seite, die wir wiederum mit q bezeichnen.

In der Matrix-Kette für die DAE (4.18) haben wir

$$G_0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}, \quad G_1 = \begin{pmatrix} I & B_{12} \\ 0 & B_{22} \end{pmatrix}. \tag{4.19}$$

Die DAE (4.18) hat somit Index 1, genau dann wenn die Matrix G_1 bzw. die Matrix B_{22} regulär ist. Für höheren Index haben wegen der Regularität der DAE die Matrizen G_1 und damit auch B_{22} konstanten Rang auf dem Intervall $[t_0, T]$.
Für diesen Fall wollen wir den x_2-Anteil der Variablen noch einmal in zwei Komponenten aufspalten und somit schließlich eine spezielle dreigeteilte Form der DAE erhalten. Wir partitionieren die Zustandsvariable $x \in \mathbb{R}^m$ in der Form

$$\left\{ \begin{array}{rcl} m & = & m_1 + m_2 + m_3 \\ m_1 & := & r \\ m_2 & := & \operatorname{rang} B_{22} \\ m_3 & := & m - m_1 - m_2 \end{array} \right. \tag{4.20}$$

und betrachten eine weitere Transformationen der semi-impliziten DAE mit

$$M = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & M_{22} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad N = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & N_{22} \end{pmatrix}. \tag{4.21}$$

Da die Matrix B_{22} konstanten Rang hat, können wir dabei die Matrizen $M_{22}, N_{22} \in C([t_0, T], \mathbb{R}^{(m_2+m_3)\times(m_2+m_3)})$ stetig und regulär so wählen, dass

$$M_{22}B_{22}N_{22} = \begin{pmatrix} I_{m_2\times m_2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.22}$$

Damit ist dann

$$MA = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & M_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4.23}$$

und

$$DN = \begin{pmatrix} I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & N_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.24}$$

das heißt, wir erhalten wiederum semi-implizite Form.

Die Matrix B transformiert sich dabei in der Weise

$$\begin{aligned} MBN &= \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & M_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & N_{22} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12}N_{22} \\ M_{22}B_{21} & M_{22}B_{22}N_{22} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{4.25}$$

Damit haben wir die DAE zunächst auf die Form

$$\begin{pmatrix} I \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} I & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right]' + \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & I & 0 \\ B_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = q \tag{4.26}$$

transformiert.

Wir betrachten eine <u>weitere Transformation</u> mit

$$M = \begin{pmatrix} I & -B_{12} & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & M_{33} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad N = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ -B_{21} & I & 0 \\ 0 & 0 & N_{33} \end{pmatrix}. \tag{4.27}$$

Dabei seien $M_{33}, N_{33} \in C([t_0, T], \mathbb{R}^{m_3 \times m_3})$ stetige, reguläre Matrix-Funktionen.

Es ist dann

$$MA = \begin{pmatrix} I & -B_{12} & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & M_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4.28}$$

und

$$DN = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ -B_{21} & I & 0 \\ 0 & 0 & N_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.29}$$

das heißt, wir erhalten wiederum semi-implizite Form.

Die Matrix B transformiert sich dabei in der Weise

$$\begin{aligned} MBN &= \begin{pmatrix} I & -B_{12} & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & M_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & I & 0 \\ B_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ -B_{21} & I & 0 \\ 0 & 0 & N_{33} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} B_{11} - B_{12}B_{21} & 0 & B_{13}M_{33} \\ 0 & I & 0 \\ N_{33}B_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{4.30}$$

Wir fassen $B_{11} - B_{12}B_{21}$, $B_{13}M_{33}$ und $N_{33}B_{31}$ als neue Matrizen B_{11}, B_{13} und B_{31} auf.

Wir haben somit insgesamt durch die Verkettung der ersten Transformation und Refaktorisierung auf semi-implizite Form und den beiden zusätzlichen Transformationen insgesamt eine Transformation, die uns eine DAE in folgender erweiterter Hessenberg-Form liefert:

$$\begin{pmatrix} I \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} I & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right]' + \begin{pmatrix} B_{11} & 0 & B_{13} \\ 0 & I & 0 \\ B_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = q \tag{4.31}$$

Zur genaueren Wahl der Matrizen M_{33} und N_{33} untersuchen wir die nun erhaltene DAE zunächst einmal genauer mit Hilfe ihrer Matrix-Kette:

<u>Matrix-Kette und Index-Kriterien</u>

Wir betrachten die Matrix-Kette aus [Mä2] für die DAE in erweiterter Hessenberg-Form. Es ist

$$G_0 = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.32}$$

und somit

$$N_0 = \ker G_0 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 = 0\}, \tag{4.33}$$

das heißt, wir können wählen

$$Q_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}, \quad P_0 = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.34}$$

und haben damit

$$G_1 = \begin{pmatrix} I & 0 & B_{13} \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.35}$$

Also ist

$$N_1 = \ker G_0 = \{(x_1, x_2, x_3) \,|\, x_2 = 0,\ x_1 + B_{13}x_3 = 0\}. \tag{4.36}$$

Die Regularität der DAE liefert nach [Mä2] die Eigenschaft

$$N_0 \cap N_1 = \{0\} \quad \Rightarrow \quad \ker B_{13} = \{0\}. \tag{4.37}$$

Zur Wahl von Q_1 betrachten wir zu $B_{13} \in \mathbb{R}^{m_1 \times m_3}$ eine verallgemeinerte Inverse $B_{13}^- \in \mathbb{R}^{m_3 \times m_1}$, also mit

$$B_{13}B_{13}^- B_{13} = B_{13} \quad \text{und} \quad B_{13}^- B_{13} B_{13}^- = B_{13}^-. \tag{4.38}$$

Dann ist $B_{13}B_{13}^-$ ein Projektor mit $\operatorname{im} B_{13}B_{13}^- = \operatorname{im} B_{13}$ und wir können wählen

$$Q_1 = \begin{pmatrix} B_{13}B_{13}^- & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ B_{13}^- & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_1 = \begin{pmatrix} I - B_{13}B_{13}^- & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ -B_{13}^- & 0 & I \end{pmatrix}. \tag{4.39}$$

Bei dieser Wahl gilt offensichtlich $Q_1 Q_0 = 0$ und wir haben

$$G_2 = \begin{pmatrix} I + B_{11}B_{13}B_{13}^- & 0 & B_{13} \\ 0 & I & 0 \\ B_{31}B_{13}B_{13}^- & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.40}$$

<u>Die erweiterte Hessenberg-Form</u>

Wegen der Regularität der DAE hat nun die Matrix G_2 konstanten Rang auf dem Intervall $[t_0, T]$. Daraus folgt insbesondere, dass die Matrizen B_{13} und B_{31} konstanten Rang auf $[t_0, T]$ haben. Wir können daher die Matrizen $M_{33}, N_{33} \in C([t_0, T], \mathbb{R}^{m_3 \times m_3})$ stetig und regulär so wählen, dass

$$B_{31}B_{13} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m_3 \times m_3}. \tag{4.41}$$

Schließlich haben wir folgenden Satz, der uns die Transformierbarkeit einer beliebigen regulären DAE auf die erweiterte Hessenberg-Form garantiert:

Satz 6 *(Satz und Definition erweiterte Hessenberg-Form)*
Eine reguläre DAE der Form (4.1) kann durch Transformationen und Refaktorisierung des Hauptterms auf die Form

$$\begin{pmatrix} I \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} I & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right]' + \begin{pmatrix} B_{11} & 0 & B_{13} \\ 0 & I & 0 \\ B_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = q \quad (4.42)$$

mit

$$B_{31}B_{13} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m_3 \times m_3} \quad (4.43)$$

transformiert werden. Dabei ist $x_1 \in \mathbb{R}^{m_1}$*,* $x_2 \in \mathbb{R}^{m_2}$*,* $x_3 \in \mathbb{R}^{m_3}$ *mit* $m = m_1 + m_2 + m_3$*. Eine DAE in der Form (4.42) nennen wir eine DAE in erweiterter Hessenberg-Form.*

Bemerkungen:

- Die DAE in erweiterter Hessenberg-Form unterscheidet sich vom bekannten Spezialfall einer DAE in Hessenberg-Form offenbar nur durch die Komponente x_2, die in der erweiterten Hessenberg-Form vollständig von den Komponenten x_1 und x_3 entkoppelt ist und direkt linear von der rechten Seite der DAE abhängt.
- Offensichtlich ist die adjungierte DAE einer DAE in erweiterter Hessenberg-Form wiederum eine DAE in erweiterter Hessenberg-Form. Damit können Eigenschaften der DAE und ihrer adjungierten DAE sowie auch deren Beziehungen zueinander mit Eigenschaften der erweiterten Hessenberg-Form untersucht werden.

<u>Der Fall Index 2</u>

Im Fall Index 2 muss die Matrix G_2 regulär sein. Dies ist offenbar genau dann der Fall, wenn die Matrizen B_{13}, B_{13}^- und $B_{31}B_{13}$ vollen Rang haben. Dann gilt wegen (4.43)

$$B_{31}B_{13} = I \quad (4.44)$$

und wir können hier als verallgemeinerte Inverse von B_{13} wählen

$$B_{13}^- := B_{31}. \quad (4.45)$$

Damit haben wir

$$DP_0P_1D^- \;=\; I - B_{13}B_{31} \tag{4.46}$$

und aus der Index-Definition in [Mä2] folgt

Lemma 2 *(Bedingung für Index 2)*
Die DAE in erweiterter Hessenberg-Form hat Index 2 genau dann, wenn gilt

$$B_{31}B_{13} = I_{m_3} \quad \textit{und} \quad B_{13}B_{31} \in C^1([t_0,T],\mathbb{R}^{m_1\times m_1}). \tag{4.47}$$

<u>Lösungs-Darstellung der gesteuerten DAE im Fall Index 2 und Kausalität</u>

Wir betrachten die gesteuerte DAE in erweiterter Hessenberg-Form, also mit der rechten Seite $q = Cu$, $C \in C([t_0,T],\mathbb{R}^{m\times k})$:

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{x}_1 + B_{11}x_1 + B_{13}x_3 &=& C_1u \\ x_2 &=& C_2u \\ B_{31}x_1 &=& C_3u. \end{array}\right. \tag{4.48}$$

Nach (4.46) ist hier $DP_0P_1D^-x = (I - B_{13}B_{31})x_1$ die Variable der inhärenten gewöhnlichen Differentialgleichung und für den Rest der Zustandsvariablen erhalten wir

$$\left\{\begin{array}{rcl} B_{13}B_{31}x_1 &=& B_{13}C_3u \\ \\ x_2 &=& C_2u \\ \\ x_3 &=& B_{31}C_1u - B_{31}\dot{x}_1 - B_{31}B_{11}x_1 \\ \\ &=& B_{31}[(B_{13}B_{31})' - B_{11}]x_1 + B_{31}C_1u - B_{31}(B_{13}C_3u)'. \end{array}\right. \tag{4.49}$$

Dabei haben wir benutzt

$$B_{31}(B_{13}B_{31}x_1)' = B_{31}(B_{13}B_{31})'x_1 + \underbrace{B_{31}B_{13}}_{=I}B_{31}\dot{x}_1. \tag{4.50}$$

Die Komponente x_3 hängt von der Ableitung der Steuer-Funktion ab und ist somit bei nur stetiger Steuer-Funktion im Allgemeinen nicht in allen Zeitpunkten definiert bzw. kann zu einer unstetigen Funktion auf $[t_0,T]$ fortgesetzt werden.

Für eine stetige Steuer-Funktion $u \in C([t_0, T], \mathbb{R}^k)$ erhalten wir somit eine Lösung $x : [t_0, T] \to \mathbb{R}^m$ mit

$$\left\{ \begin{array}{rcl} (I - B_{13}B_{31})x_1 & \in & C^1 \\ (B_{31}B_{13})x_1 & \in & C \\ x_2 & \in & C \\ x_3 & & \text{evtl. nicht definiert bzw. unstetig} \end{array} \right. \tag{4.51}$$

Die Kausalitäts-Bedingung (2.6) lautet hier speziell

$$DQ_1G_2^{-1}C = B_{13}C_3 = 0. \tag{4.52}$$

Wegen $\ker B_{13} = \{0\}$ nach (4.37) erhalten wir daraus die Kausalitäts-Bedingung für die DAE in erweiterter Hessenberg-Form:

Lemma 3 *Die DAE in erweiterter Hessenberg Form ist genau dann kausal, wenn gilt*

$$C_3 = 0. \tag{4.53}$$

5 Die Transformation des Optimierungs-Problems

Wir untersuchen nun, wie sich die in Abschnitt 4 beschriebene Transformation und Refaktorisierung der DAE auf das Optimierungs-Problem (OP) auswirkt. Wir betrachten also zwei stetige reguläre Matrix-Funktionen

$$M, N \in C([t_0, T], \mathbb{R}^{m \times m}) \tag{5.1}$$

zur Transformation der DAE und eine stetig differenzierbare Matrix-Funktion

$$H \in C^1([t_0, T]\mathbb{R}^{r \times n}) \tag{5.2}$$

zur Refaktorisierung des Hauptterms.

Auswirkungen der Refaktorisierung auf die Lösung der DAE

Die Refaktorisierung (4.8) der DAE hat keinen Einfluss auf die Lösung der DAE. Für eine gegebene Steuer-Funktion u und die zugehörige Trajektorie x ist wegen

$$A(Dx)' + Bx = \tilde{A}(\tilde{D}x)' + \tilde{B}x = Cu \tag{5.3}$$

dieselbe Trajektorie x auch Lösung der refaktorisierten DAE. Daraus folgt zunächst trivialerweise insbesondere die Eigenschaft

Lemma 4 *Der Wert $J(u)$ des Kosten-Funktionals ist unabhängig von der Refaktorisierung der DAE.*

Ferner ist zum Beispiel auch die Kausalität der DAE offensichtlich unabhängig von der Refaktorisierung. Diese Aussage werden wir weiter unten auch noch anhand der Kausalitäts-Bedingung exakt belegen.

Transformation des Optimierungs-Problems

Die Refaktorisierung der DAE hat nach Lemma 4 keinen Einfluss auf das Kosten-Funktional. Aus der Transformation der DAE ergibt sich jedoch zunächst das transformierte Anfangswert-Problem

$$(\widetilde{AWP}) \qquad \begin{cases} \tilde{A}(\tilde{D}y)' + \tilde{B}y = \tilde{C}u \\ \tilde{D}(t_0)\tilde{P}_1(t_0)(y(t_0) - y^0) = 0 \end{cases} \tag{5.4}$$

mit $y = N^{-1}x$, also insbesondere $y_0 := N^{-1}x_0$ nach (4.3) sowie eine Transformation des Kosten-Funktionals mit

$$\begin{cases} \tilde{V} & := & N^T(T)VN(T) \\ \tilde{W} & := & N^TWN \\ \tilde{S} & := & N^TS \\ \tilde{K} & := & K. \end{cases} \tag{5.5}$$

Wir erhalten also ein transformiertes Optimierungs-Problem

$$(\widetilde{OP}) \qquad \begin{cases} \tilde{J}(u) = \frac{1}{2}y^T(T)\tilde{V}y(T) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}\left\{y^T\tilde{W}y + 2y^T\tilde{S}u + u^T\tilde{K}u\right\}dt \to \text{Min} \\ \\ \tilde{A}(\tilde{D}y)' + \tilde{B}y = \tilde{C}u \quad , \quad \tilde{D}(t_0)\tilde{P}_1(t_0)(y(t_0) - y^0) = 0 \\ \\ u(t) \in \mathcal{U} \quad , \quad t \in [t_0, T]. \end{cases}$$

Wir untersuchen im Folgenden einige Eigenschaften des transformierten Optimierungs-Problems $(\widetilde{OP})$ im Vergleich zum ursprünglichen Optimierungs-Problem (OP).

Der Wert des Funktionals $\tilde{J}(u)$

Der Wert des Funktionals ändert sich durch die Transformation nicht. Sei dazu $u : [t_0, T] \to \mathcal{U}$ eine Steuer-Funktion und $x : [t_0, T] \to \mathbb{R}^m$ sowie

$y : [t_0, T] \to \mathbb{R}^m$ die zugehörigen Lösungen (AWP) bzw. von $(\widetilde{AWP})$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\tilde{J}(u) &= \frac{1}{2}y^T(T)\tilde{V}y(T) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{T} \left\{ y^T\tilde{W}y + 2y^T\tilde{S}u + u^T\tilde{K}u \right\} dt \\
&= \frac{1}{2}x^T(T)N^{-T}(T)N^T(T)VN(T)N^{-1}(T)x(T) \\
&\quad + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{T} \left\{ x^TN^{-T}N^TWNN^{-1}x + 2x^TN^{-T}N^TSu + u^TKu \right\} dt \\
&= \frac{1}{2}x^T(T)Vx(T) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{T} \left\{ x^TWx + 2x^TSu + u^TKu \right\} dt = J(u).
\end{aligned}$$

Wir haben also die Eigenschaft

Lemma 5 *Für eine beliebige Steuer-Funktion $u : [t_0, T] \to \mathcal{U}$ gilt*

$$\tilde{J}(u) = J(u).$$

Daraus folgt die wichtige Tatsache

Satz 7 *Eine Steuer-Funktion $u : [t_0, T] \to \mathcal{U}$ ist genau dann eine Lösung des Optimierungs-Problems (OP), wenn sie auch eine Lösung des transformierten Optimierungs-Problems $(\widetilde{OP})$ ist.*

Die transformierte adjungierte DAE

Weiter betrachten wir die adjungierte DAE

$$D^T(A^T\lambda)' - B^T\lambda = Wx + Su \tag{5.6}$$

und die transformierte adjungierte Variable $\mu \in \mathbb{R}^m$ mit

$$\boxed{\mu := M^{-T}\lambda \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda = M^T\mu} \tag{5.7}$$

Die transformierte adjungierte DAE hat dann die Form

$$\tilde{D}^T(\tilde{A}^T\mu)' - \tilde{B}^T\mu = \tilde{W}y + \tilde{S}u. \tag{5.8}$$

Es gilt also offensichtlich folgende Beziehung:

Lemma 6 *Die adjungierte DAE der mit M und N transformierten DAE ist gleich der mit N^T und M^T transformierten DAE der adjungierten DAE.*

Die refaktorisierte adjungierte DAE

Die adjungierte Gleichung der refaktorisierten DAE lautet

$$\begin{aligned} & D^T(H^-)^T \left(H^T A^T \lambda\right)' - \left(B^T + D^T \left(H^-\right)^T \left(H^T R^T\right)' A^T\right) \lambda \\ & = Wx + Su. \end{aligned} \tag{5.9}$$

Wenn wir andererseits die adjungierte DAE mit $H_* := (H^-)^T$ refaktorisieren, so erhalten wir

$$\begin{aligned} & D^T(H^-)^T \left(H^T A^T \lambda\right)' - \left(B^T - D^T \left(R^T (H^-)^T\right)' H^T A^T\right) \lambda \\ & = Wx + Su. \end{aligned} \tag{5.10}$$

Dabei ist $(H_*)^- = H^T$ und $R_* = R^T$ und somit auch

$$R_* H_* (H_*)^- R_* = R^T (H^-)^T H^T R^T = (RHH^-R)^T = R^T = R_*. \tag{5.11}$$

Nun gilt wegen

$$A(Dx)' = A(RDx)' = AR'Dx + AR(Dx)' = AR'Dx + A(Dx)', \tag{5.12}$$

dass

$$\begin{aligned} 0 &= AR'D = A(RHH^-R)'D \\ &= A(RH)'H^-RD + ARH(H^-R)'D \\ &= A(RH)'H^-D + AH(H^-R)'D \end{aligned} \tag{5.13}$$

und daraus folgt die Beziehung

$$D^T(H^-)^T (H^T R^T)' A^T = -D^T \left(R^T (H^-)^T\right)' H^T A^T . \tag{5.14}$$

Damit erhalten wir durch Vergleich beider Gleichungen die Aussage

Lemma 7 *Die adjungierte DAE der mit H refaktorisierten DAE ist gleich der mit $(H^-)^T$ refaktorisierten DAE der adjungierten DAE.*

Die transformierte Matrix-Kette

Wir untersuchen die zur transformierten DAE gehörige Matrix-Kette. Wie bereits in [Mä2] beschrieben, erhalten wir durch die Transformation mit M und N unter anderem

$$\begin{array}{lll} \tilde{Q}_0 = N^{-1}Q_0N & \tilde{P}_0 = N^{-1}P_0N & \tilde{G}_1 = MG_1N \\ \tilde{Q}_1 = N^{-1}Q_1N & \tilde{P}_1 = N^{-1}P_1N & \tilde{G}_2 = MG_2N. \end{array} \tag{5.15}$$

Dagegen gilt für den zum Hauptterm gehörige Projektor $\tilde{R} = R$.

Durch die Refaktorisierung mit H erhalten wir

$$\begin{array}{lll} \tilde{Q}_0 = Q_0 & \tilde{P}_0 = P_0 & \tilde{G}_1 = G_1 \\ \tilde{Q}_1 = Q_1 & \tilde{P}_1 = P_1 & \end{array} \tag{5.16}$$

sowie

$$\tilde{G}_2 = G_2F_2 \quad \text{mit} \quad F_2 = I + P_1P_0Q_1D^-(RH)'H^-DQ_1. \tag{5.17}$$

Dabei gilt die wichtige Eigenschaft

$$Q_1F_2^{-1} = Q_1. \tag{5.18}$$

Für den zum Hauptterm gehörigen Projektor gilt $\tilde{R} = H^-RH$.

Im Folgenden werden wir diese Beziehungen benutzen, um kompliziertere Ausdrücke mit Matrizen der Matrix-Kette von unserer DAE in die Welt der DAE in erweiterter Hessenberg-Form und umgekehrt zu transformieren.

Kausalität der transformierten DAE

Für die Kausalitätsbedingung (2.6) gilt nach der Transformation

$$\begin{array}{rcl} \tilde{D}\tilde{Q}_1\tilde{G}_2^{-1}\tilde{C} & = & (DN)(N^{-1}Q_1N)(N^{-1}G_2^{-1}M^{-1})(MC) \\ & = & DQ_1G_2^{-1}C. \end{array} \tag{5.19}$$

Nach der Refaktorisierung gilt

$$\tilde{D}\tilde{Q}_1\tilde{G}_2^{-1}\tilde{C} = (H^-D)Q_1(G_2F_2)^{-1}C = H^-DQ_1G_2^{-1}C. \tag{5.20}$$

Wegen $RHH^-D = RHH^-RD = RD = D$ gilt aber

$$DQ_1G_2^{-1}C = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad H^-DQ_1G_2^{-1}C = 0 \tag{5.21}$$

und somit insgesamt nach Transformation und Refaktorisierung

$$\tilde{D}\tilde{Q}_1\tilde{G}_2^{-1}\tilde{C} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad DQ_1G_2^{-1}C = 0. \tag{5.22}$$

Wir haben also das Ergebnis

Satz 8 *Die gesteuerte DAE ist genau dann kausal, wenn die transformierte und refaktorisierte gesteuerte DAE kausal ist.*

Analog ist damit auch gezeigt, dass für die Kausalitäts-Bedingung (3.20) der adjungierten DAE nach der Transformation und Refaktorisierung gilt

$$\begin{array}{rcl} \tilde{A}\tilde{Q}_{*1}\tilde{G}_{*2}^{-1}\tilde{S} = 0 & \Longleftrightarrow & A^TQ_{*1}G_{*2}^{-1}S = 0 \\ \tilde{A}^T\tilde{Q}_{*1}\tilde{G}_{*2}^{-1}\tilde{W} = 0 & \Longleftrightarrow & A^TQ_{*1}G_{*2}^{-1}W = 0. \end{array} \tag{5.23}$$

Die Aussage von Satz 8 gilt somit selbstverständlich ebenfalls für die adjungierte DAE.

<u>Transformation des Randwertproblems</u>

Mit der obigen Transformation und Refaktorisierung der DAE transformiert sich das Randwertproblem (RWP) in das Randwertproblem

$$(\widetilde{RWP}) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \begin{array}{rcl} \tilde{A}(\tilde{D}y)' & = & -\tilde{B}y + \tilde{C}u \\ \tilde{D}^T(\tilde{A}^T\mu)' & = & \tilde{W}y + \tilde{B}^T\mu + \tilde{S}u \\ 0 & = & \tilde{S}^Ty - \tilde{C}^T\mu + \tilde{K}u \end{array} \\ \\ \begin{array}{rcl} \tilde{D}(t_0)\tilde{P}_1(t_0)(y(t_0) - y^0) & = & 0 \\ \tilde{D}^T(T)\tilde{A}^T(T)\mu(T) & = & -\tilde{V}y(T). \end{array} \end{array} \right.$$

Die Transformation des Randwertproblems kann aufgefasst werden als Transformation und Refaktorisierung einer DAE:

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D^T \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} D & 0 & 0 \\ 0 & A^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \lambda \\ u \end{pmatrix} \right]' + \begin{pmatrix} B & 0 & -C \\ -W & -B^T & -S \\ S^T & -C^T & K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \lambda \\ u \end{pmatrix} = 0 \tag{5.24}$$

wird zu

$$\begin{pmatrix} \tilde{A} & 0 \\ 0 & \tilde{D}^T \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} \tilde{D} & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{A}^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \lambda \\ u \end{pmatrix} \right]' + \begin{pmatrix} \tilde{B} & 0 & -\tilde{C} \\ -\tilde{W} & -\tilde{B}^T & -\tilde{S} \\ \tilde{S}^T & -\tilde{C}^T & \tilde{K} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \lambda \\ u \end{pmatrix} = 0 \tag{5.25}$$

mit der Transformation

$$\begin{pmatrix} \tilde{A} & 0 \\ 0 & \tilde{D}^T \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M & 0 & 0 \\ 0 & N^T & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D^T \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.26}$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{D} & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{A}^T & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D & 0 & 0 \\ 0 & A^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N & 0 & 0 \\ 0 & M^T & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \tag{5.27}$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{B} & 0 & -\tilde{C} \\ -\tilde{W} & -\tilde{B}^T & -\tilde{S} \\ \tilde{S}^T & -\tilde{C}^T & \tilde{K} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M & 0 & 0 \\ 0 & N^T & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B & 0 & -C \\ -W & -B^T & -S \\ S^T & -C^T & K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N & 0 & 0 \\ 0 & M^T & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \tag{5.28}$$

und der Refaktorisierung

$$\begin{pmatrix} \tilde{A} & 0 \\ 0 & \tilde{D}^T \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D^T \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H & 0 \\ 0 & (H^-)^T \end{pmatrix} \tag{5.29}$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{D} & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{A}^T & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H^- & 0 \\ 0 & H^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D & 0 & 0 \\ 0 & A^T & 0 \end{pmatrix} \tag{5.30}$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \tilde{B} & 0 & -\tilde{C} \\ -\tilde{W} & -\tilde{B}^T & -\tilde{S} \\ \tilde{S}^T & -\tilde{C}^T & \tilde{K} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} B & 0 & -C \\ -W & -B^T & -S \\ S^T & -C^T & K \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} A(RH)'H^-D & 0 & 0 \\ 0 & D^T \left(R^T(H^-)^T\right)' H^T A^T & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{5.31}$$

Dabei ist

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} A(RH)'H^-D & 0 & 0 \\ 0 & D^T \left(R^T(H^-)^T\right)' H^T A^T & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D^T \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & R^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H & 0 \\ 0 & (H^-)^T \end{pmatrix} \right]' \begin{pmatrix} H^- & 0 \\ 0 & H^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D & 0 & 0 \\ 0 & A^T & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{5.32}$$

Nach der Transformation gilt für die Randbedingungen

$$\begin{aligned}
& \tilde{D}(t_0)\tilde{P}_1(t_0)(y(t_0)-y^0)=0 \\
\Leftrightarrow\quad & D(t_0)N(t_0)N^{-1}(t_0)P_1(t_0)N(t_0)(N^{-1}(t_0)x(t_0)-N^{-1}(t_0)x^0)=0 \\
\Leftrightarrow\quad & D(t_0)P_1(t_0)(x(t_0)-x^0)=0.
\end{aligned} \tag{5.33}$$

und

$$\begin{aligned}
& \tilde{D}^T(T)\tilde{A}^T(T)\mu(T)=-\tilde{V}y(T) \\
\Leftrightarrow\quad & N^T(T)D^T(T)A^T(T)M^T(T)M^{-T}(T)\lambda(T)=-N^T(T)VN(T)N^{-1}(T)x(T) \\
\Leftrightarrow\quad & N^T(T)D^T(T)A^T(T)\lambda(T)=-N^T(T)Vx(T) \\
\Leftrightarrow\quad & D^T(T)A^T(T)\lambda(T)=-Vx(T).
\end{aligned} \tag{5.34}$$

Nach der Refaktorisierung gilt für die Randbedingungen

$$\begin{aligned}
& \tilde{D}(t_0)\tilde{P}_1(t_0)(x(t_0)-x^0)=0 \\
\Leftrightarrow\quad & H^-(t_0)D(t_0)P_1(t_0)(x(t_0)-x^0)=0 \\
\Leftrightarrow\quad & D(t_0)P_1(t_0)(x(t_0)-x^0)=0
\end{aligned} \tag{5.35}$$

wegen $RHH^-D = RHH^-RD = RD = D$ und

$$\begin{aligned}
& \tilde{D}^T(T)\tilde{A}^T(T)\lambda(T)=-Vx(T) \\
\Leftrightarrow\quad & D^T(T)H^-(T)H^T(T)A^T(T)\lambda(T)=-Vx(T) \\
\Leftrightarrow\quad & D^T(T)A^T(T)\lambda(T)=-Vx(T).
\end{aligned} \tag{5.36}$$

Wir haben also den Satz

Satz 9 *Das Tripel (x,λ,u) ist genau dann Lösung des Randwert-Problems (RWP), wenn das zugehörige Tripel (y,μ,u) Lösung des transformierten Randwert-Problems $(\widetilde{RWP})$ ist.*

6 Ein spezielles Kostenfunktional mit kausaler adjungierter DAE

6.1 Das spezielle Kostenfunktional

Wir wollen nun ein spezielles Kostenfunktional betrachten, welches nur den Teil der Zustandsvariablen bewertet, welcher keine Ableitungs- Komponenten der Steuer-Funktion enthält. Es wird sich herausstellen, dass die adjungierte DAE dann bei stetiger Steuer-Funktion eine stetige rechte Seite hat und kausal ist und somit eine stetige Lösung besitzt.

Wir betrachten von nun ab eine DAE mit Index 2, die nicht mehr notwendigerweise kausal ist. Die bedeutet, dass wir im Fall nur stetiger Steuer-Funktionen einen allgemeineren Lösungs-Begriff als in Satz 1 benötigen. In Abschnitt 4 haben wir bereits die Lösungs-Struktur der DAE in erweiterter Hessenberg-Form untersucht. Hier betrachten wir nun die allgemeine gesteuerte DAE:

Verallgemeinerter Lösungs-Begriff für die nicht-kausale DAE

Wie in Satz 1 wird in [Mä1] bzw. [Mä2] zur Lösung der DAE mit Index 2 stets die Differenzierbarkeit der Komponente $DQ_1G_2^{-1}Cu$ der rechten Seite der DAE vorausgesetzt, um eine definierte stetige Lösung der DAE zu erhalten. Die Notwendigkeit dieser Bedingung ist offensichtlich nach der Entkopplung (2.5) der DAE.
Bei einer kausalen DAE verschwindet gerade die Komponente $DQ_1G_2^{-1}Cu$, so dass hier keine Differenzierbarkeits-Voraussetzung für die rechte Seite notwendig ist.
Betrachten wir nun eine allgemeine nicht notwendig kausale DAE und wollen dennoch stetige Steuer-Funktionen $u \in C([t_0, T], \mathbb{R}^m)$ zulassen, so müssen wir den Lösungs-Begriff hier verallgemeinern.

Wir betrachten die ebenfalls in [Mä2] definierte Menge

$$S_0 = \{z \in \mathbb{R}^m | Bz \in \operatorname{im} G_0\} \tag{6.1}$$

und es gilt (z.B. [Ti])

$$\operatorname{im} Q_0Q_1 = N_0 \cap S_0. \tag{6.2}$$

An der Entkopplung (2.5) können wir ablesen, dass die Komponente der Zustandsvariablen, welche Ableitungen der Steuer-Funktion enthält, im Bild von Q_0Q_1 und damit nach (6.2) in der Menge $N_0 \cap S_0$ liegt. Zur Beschreibung benutzen wir auch noch die in [Ti] eingeführten Projektoren

$$\left\{ \begin{array}{lcl} T & \in & \mathbb{R}^{m\times m}, \quad T^2 = T, \quad \operatorname{im} T = N_0 \cap S_0 \\ U & = & I - T. \end{array} \right. \tag{6.3}$$

Die Zustands-Variable lässt sich somit zerlegen in die T-Komponente, welche zu jedem Zeitpunkt von der Ableitung der Steuer-Funktion zu diesem Zeitpunkt abhängt, und die U-Komponente, welche zu jedem Zeitpunkt unabhängig von der Ableitung der Steuer-Funktion zu diesem Zeitpunkt ist.

Für eine stetige Funktion u ist die Ableitung von $DQ_1G_2^{-1}Cu$ im Allgemeinen nicht definiert. Nach (2.11) ist nun $DQ_1x = DQ_1G_2^{-1}Cu$ und damit gilt für den Hauptterm der DAE

$$A(Dx)' = A(DP_1x)' + A(DQ_1x)' = A(DP_1x)' + A(DQ_1G_2^{-1}Cu)'. \quad (6.4)$$

Die Ableitung von Dx ist also in dem Sinne zu verstehen, dass im Allgemeinen nur die Komponente DP_1x wirklich differenzierbar ist.
Die U-Komponente der Lösung ist für alle Zeitpunkte eindeutig definiert und eine stetige Funktion. Die T-Komponente der Lösung ist nur an den Zeitpunkten eindeutig definiert, an denen die Komponente $DQ_1G_2^{-1}Cu$ differenzierbar ist. Wollen wir nun eine auf dem gesamten Intervall $[t_0, T]$ definierte Lösung haben, so können für einen Zeitpunkt, für den die Ableitung von $DQ_1G_2^{-1}Cu$ nicht definiert ist, den Wert der T-Komponente beliebig wählen und erhalten somit eine Funktion Tx auf dem gesamten Intervall $[t_0, T]$, die jedoch im Allgemeinen nicht stetig ist.

Wir bezeichnen diese verallgemeinerte Lösung im Gegensatz zur klassischen Lösung der DAE aus [Mä2] als U-Lösung, da im Allgemeinen nur die U-Komponente der Lösung hier in allen Zeitpunkten eindeutig definiert und stetig ist.

Als Definition für die verallgemeinerte Lösung und als Existenz-Satz für die Lösung der DAE im Falle einer stetigen Steuer-Funktion können wir somit formulieren:

Satz 10 *(Definition und Existenz-Satz U-Lösung)*
Die DAE habe Index 2 und es seien $DP_1D^-, DQ_1D^- \in C^1([t_0, T], \mathbb{R}^{n\times n})$. Dann existieren Projektor-Funktionen $U, T \in C([t_0, T], \mathbb{R}^{m\times m})$, so dass das Anfangswert-Problem (AWP) für jede Steuer-Funktion

$$u \in C([t_0, T], \mathbb{R}^m) \quad (6.5)$$

eine Lösung

$$x : [t_0, T] \to \mathbb{R}^m$$

besitzt mit einer eindeutig bestimmten stetigen Komponente

$$Ux \in C([t_0, T], \mathbb{R}^m)$$

und einer Komponente

$$Tx : [t_0, T] \to \mathbb{R}^m$$

mit

$$x = Ux + Tx.$$

Die Lösung x bezeichnen wir als <u>*U-Lösung*</u> *der DAE.*

Für die U-Komponente haben wir die Abschätzung

$$\|Ux\|_\infty \leq L \left(\|D(t_0)P_1(t_0)x^0\| + \|Cu\|_\infty \right) \tag{6.6}$$

mit einer Konstanten L.

Wir betrachten ein Beispiel dafür, dass wir für die T-Komponente der Zustands-Variablen und somit auch für die gesamte Zustands-Variablen keine Abschätzung in der Form (6.6) angeben können:

Beispiel 1 *Wir betrachten auf dem Intervall $[0, T]$ die DAE*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x}_1 - x_2 & = & 0 \quad , \quad x_1(0) = x_1^0 \\ \dot{x}_2 - x_3 & = & 0 \\ x_2 & = & u \end{array} \right. \tag{6.7}$$

mit der Lösung

$$\begin{array}{rcl} x_1(t) & = & x_1^0 + \displaystyle\int_0^t u(s)ds \\ x_2(t) & = & u(t) \\ x_3(t) & = & \dot{u}(t) \quad , \quad t \in [0, T]. \end{array}$$

Für $\epsilon > 0$ betrachten wir die Steuer-Funktion $u_\epsilon(t) := \epsilon \sin\left(\frac{1}{\epsilon^2}t\right)$. Dann ist $\dot{u}(t) = \frac{1}{\epsilon}\cos(\frac{1}{\epsilon^2}t)$ und es gilt $\|u\|_\infty \leq \epsilon$, aber wegen $\dot{u}(0) = \frac{1}{\epsilon}$ ist $\|\dot{u}\|_\infty \geq \frac{1}{\epsilon}$.

Die Norm der T-Komponente $x_3 = \dot{u}$ wird für $\epsilon \to 0$ beliebig groß, obwohl die Norm der Steuer-Funktion gegen Null geht. $\Box$

Wahl des Kosten-Funktionals

Nach Definition der Zerlegung $x = Ux + Tx$ betrachten wir nun das quadratische Kosten-Funktional mit

$$\left.\begin{array}{rcl} Wz & = & 0 \\ S^T z & = & 0 \end{array}\right\} \quad \text{für alle} \quad z \in N_0 \cap S_0. \tag{6.8}$$

Mit einem Projektor T auf den Raum $N_0 \cap S_0$ gilt also

$$WT = 0 \quad \text{und} \quad S^T T = 0. \tag{6.9}$$

Das Funktional bewertet also von der Zustandsvariablen nur die stetige U-Komponente. Dieses Kosten-Funktional nennen wir im Folgenden spezielles Kosten-Funktional.

6.2 Das spezielle Kosten-Funktional für die DAE in erweiterter Hessenberg-Form

Für die DAE in erweiterter Hessenberg-Form gilt speziell

$$N_0 = \ker G_0 = \left\{ (z_1, z_2, z_3)^T \in \mathbb{R}^m \,|\, z_1 = 0 \right\}. \tag{6.10}$$

Für $z = (z_1, z_2, z_3)^T \in \mathbb{R}^m$ ist

$$Bz = \begin{pmatrix} B_{11} & 0 & B_{13} \\ 0 & I & 0 \\ B_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11} z_1 + B_{13} z_3 \\ z_2 \\ B_{31} z_1 \end{pmatrix} \tag{6.11}$$

und damit

$$\begin{aligned} S_0 &= \{ z \in \mathbb{R}^m \,|\, Bz \in \operatorname{im} G_0 \} \\ &= \left\{ (z_1, z_2, z_3)^T \in \mathbb{R}^m \,|\, z_1 \in \ker B_{31},\ z_2 = 0 \right\} \end{aligned} \tag{6.12}$$

also

$$N_0 \cap S_0 = \left\{ (z_1, z_2, z_3)^T \in \mathbb{R}^m \,|\, z_1 = 0,\ z_2 = 0 \right\}. \tag{6.13}$$

Damit können wir wählen

$$T := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad U := \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{6.14}$$

Die Projektoren T und U bei Transformation und Refaktorisierung

Bei einer Transformation der DAE haben wir $\tilde{G}_0 = MG_0N$ und $\tilde{B} = MBN$. Damit ist $\tilde{S}_0 = \{z \in \mathbb{R}^m \mid MBNz \in \operatorname{im} MG_0N\}$ Außerdem ist $\tilde{N}_0 = \ker \tilde{G}_0 = \ker MG_0N$. Also können wir $\tilde{T} = N^{-1}TN$ sowie $\tilde{U} = N^{-1}UN$ wählen.

Bei einer Refaktorisierung der DAE haben wir $\tilde{G}_0 = G_0$ und $\tilde{B} = B + A(RH)'H^-D$. Dabei ist $\operatorname{im} A(RH)'H^-D \subset \operatorname{im} A = \operatorname{im} G_0$. Außerdem gilt $\tilde{N}_0 = \ker \tilde{G}_0 = \ker G_0$. Also können wir $\tilde{T} = T$ sowie $\tilde{U} = U$ wählen.

Das spezielle Kostenfunktional für die DAE in erweiterter Hessenberg-Form

Die DAE in erweiterter Hessenberg-Form bedeutet für die Matrizen W und S im speziellen Kosten-Funktional

$$WT = \begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} & W_{13} \\ W_{12}^T & W_{22} & W_{23} \\ W_{13}^T & W_{23}^T & W_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & W_{13} \\ 0 & 0 & W_{23} \\ 0 & 0 & W_{33} \end{pmatrix} = 0 \tag{6.15}$$

und

$$S^T T = \begin{pmatrix} S_1^T & S_2^T & S_3^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & S_3^T \end{pmatrix} = 0 \tag{6.16}$$

also

$$S = \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad W = \begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} & 0 \\ W_{12}^T & W_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{6.17}$$

Im Fall des speziellen Kosten-Funktionals ist die rechte Seite

$$q_* = Wx + Su = WUx + Su \tag{6.18}$$

der adjungierten DAE bei stetiger Steuer-Funktion u ebenfalls stetig.

Dabei gilt bei Transformation der gesteuerten DAE

$$\tilde{W}\tilde{U}y + \tilde{S}u = N^T W N N^{-1} U N N^{-1} y + N^T S u = N^T(WUx + Su) \tag{6.19}$$

so dass auch hier die Stetigkeit der rechten Seite gegeben ist. Eine Refaktorisierung des Hauptterms verändert die rechte Seite nicht.

Wir untersuchen außerdem die Kausalität der adjungierten DAE im Fall des speziellen Kosten-Funktionals. Für die adjungierte DAE in erweiterter Hessenberg-Form haben wir

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} I \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} I & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} \right]' \begin{pmatrix} -B_{11}^T & 0 & -B_{31}^T \\ 0 & -I & 0 \\ -B_{13}^T & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} & 0 \\ W_{12}^T & W_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ 0 \end{pmatrix} u
\end{aligned} \tag{6.20}$$

oder

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{\lambda}_1 - B_{11}^T \lambda_1 - B_{31}^T \lambda_3 & = & W_{11}x_1 + W_{12}x_2 + S_1 u \\ -\lambda_2 & = & W_{12}^T x_1 + W_{22}x_2 + S_2 u \\ -B_{13}^T \lambda_1 & = & 0 \end{array} \right. \tag{6.21}$$

Die Variable der inhärenten ODE ist hier $D_* P_{*0} P_{*1} D_*^- \lambda = (I - B_{31}^T B_{13}^T)\lambda_1$ und für den Rest der Zustandsvariablen erhalten wir

$$\left\{ \begin{array}{rcl} B_{31}^T B_{13}^T \lambda_1 & = & 0 \\[1em] \lambda_2 & = & W_{12}^T x_2 + W_{22} x_2 + S_2 u \\[1em] \lambda_3 & = & B_{13}^T \dot{\lambda}_1 - B_{13}^T B_{11}^T \lambda_1 - B_{13}^T (W_{11}x_1 + W_{12}x_2 + S_1 u) \\[1em] & = & B_{13}^T \left[(B_{31}^T B_{13}^T)' - B_{11}^T \right] \lambda_1 - B_{13}^T (W_{11}x_1 + W_{12}x_2 + S_1 u) \end{array} \right. \tag{6.22}$$

Die Lösung der adjungierten DAE hängt offensichtlich nicht von der Ableitung der rechten Seite ab. Es ist hier die Kausalitäts-Bedingung (3.20) erfüllt, das heißt, die adjungierte DAE ist kausal. Damit haben wir mit Satz 8 insgesamt

Satz 11 *(Lösbarkeit der adjungierten DAE)*
Die adjungierte DAE der gesteuerten DAE mit Index 2 ist im Fall des speziellen Kostenfunktionals kausal. Bei stetiger Steuer-Funktion u hat sie eine stetige rechte Seite und besitzt damit eine stetige Lösung.

6.3 Die notwendige Optimalitäts-Bedingung

Wir wollen nun die notwendige Optimalitäts-Bedingung für den Fall der nichtkausalen DAE und dem speziellen Kostenfunktional beweisen.

Wir gehen wiederum aus von einer optimalen Steuerung u_* und der zugehörigen optimalen Trajektorie x_*. Mit der Abschätzung (6.6) haben wir nun für eine Variation δu der optimalen Steuerung und der zugehörigen Variation δx der optimalen Trajektorie die Eigenschaft

$$\|\delta u\|_\infty < \epsilon \quad \Longrightarrow \quad \|U\delta x\|_\infty < L\epsilon. \tag{6.23}$$

Nach Satz 11 ist die adjungierte DAE im Fall des speziellen Kosten-Funktionals kausal. Wir können daher die adjungierte Variable λ_* so wählen, dass das Tripel (x_*, λ_*, u_*) bereits Lösung des Randwert-Problems

$$\left\{ \begin{array}{rcl} A(Dx)' &=& -Bx + Cu \\ D^T(A^T\lambda)' &=& Wx + B^T\lambda + Su \\ \\ D(t_0)P_1(t_0)(x(t_0) - x^0) &=& 0 \\ D^T(T)A^T(T)\lambda(T) &=& -Vx(T) \end{array} \right. \tag{6.24}$$

ist mit $\lambda_* \in C^1_{A^T}([t_0, T], \mathbb{R}^m)$.

Um die fehlende Bedingung (3.16) zu zeigen, benötigen wir wiederum zwei Eigenschaften der DAE und ihrer adjungierten DAE, die wir zunächst für die DAE in erweiterter Hessenberg-Form zeigen und mit Hilfe der Eigenschaften aus Abschnitt 5 auf die allgemeine DAE übertragen.

Wir betrachten hier die beiden Terme $\lambda^T B\delta x$ und $\lambda^T AD\delta x$, die im Ausdruck (3.10) für ΔJ zur Berechnung der Gâteaux-Ableitung von $J(u)$ auftauchen. Es stellt sich heraus, dass wir uns hier im ersten Term auf die Betrachtung der U-Komponente von δx und im zweiten Term auf die Betrachtung der P_0P_1-Komponente von δx beschränken können. Somit spielen dann die T-Komponente von δx im ersten Term und die P_0Q_1-Komponente von δx im zweiten Term keine Rolle.

Wir betrachten die Situation für die DAE in erweiterter Hessenberg-Form. Es sei λ_* Lösung des adjungierten Systems

$$\left\{\begin{array}{rcl} \tilde{A}(\tilde{D}\lambda_1)' - B_{11}^T\lambda_1 - B_{31}^T\lambda_3 &=& W_{11}x_1 + W_{12}x_2 + S_1u \\ -\lambda_2 &=& W_{21}x_1 + W_{22}x_2 + S_2u \\ -B_{13}^T\lambda_1 &=& 0 \end{array}\right. \tag{6.25}$$

Für eine Variation δx von x_* gilt dann im ersten Term

$$\lambda_*^T B\delta x = \lambda_*^T BU\delta x + \lambda_*^T BT\delta x \tag{6.26}$$

und wir haben

$$\begin{aligned} \lambda_*^T BT\delta x &= \begin{pmatrix} \lambda_{*1}^T & \lambda_{*2}^T & \lambda_{*3}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & 0 & B_{13} \\ 0 & I & 0 \\ B_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \\ \delta x_3 \end{pmatrix} \\ &= \underbrace{\lambda_{*1}^T B_{13}}_{=0} \delta x_3 = 0. \end{aligned} \tag{6.27}$$

Nach Transformation der DAE gilt dann auch

$$\begin{aligned} \mu^T \tilde{B}\tilde{T}\delta y &= (\lambda^T M^{-1})(MBN)(N^{-1}TN)(N^{-1}\delta x) \\ &= \lambda^T BT\delta x = 0 \end{aligned} \tag{6.28}$$

und nach Refaktorisierung der DAE haben wir ebenfalls

$$\lambda^T \tilde{B}\tilde{T}\delta x = \underbrace{\lambda^T BT\delta x}_{=0} + \lambda^T A(RH)'H^- \underbrace{DT}_{=0} \delta x = 0. \tag{6.29}$$

Weiter gilt für den zweiten Term

$$\lambda_*^T AD\delta x = \lambda_*^T ADQ_1\delta x + \lambda_*^T ADP_1\delta x \tag{6.30}$$

und wir haben

$$\begin{aligned}
&\lambda_*^T ADQ_1\delta x \\
&= \begin{pmatrix} \lambda_{*1}^T & \lambda_{*2}^T & \lambda_{*3}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{13}B_{31} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ B_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \\ \delta x_3 \end{pmatrix} \qquad (6.31)\\
&= \underbrace{\lambda_{*1}^T B_{13}}_{=0} B_{31}B_{13}B_{31}\delta x_1 = 0.
\end{aligned}$$

Nach Transformation der DAE gilt dann auch

$$\begin{aligned}
\mu^T \tilde{A}\tilde{D}\tilde{Q}_1\delta y &= (\lambda^T M^{-1})(MA)(DN)(N^{-1}Q_1N)(N^{-1}\delta x) \\
&= \lambda^T ADQ_1\delta x = 0.
\end{aligned} \tag{6.32}$$

und nach Refaktorisierung der DAE haben wir ebenfalls

$$\lambda^T \tilde{A}\tilde{D}\tilde{Q}_1\delta x = \lambda^T AHH^- DQ_1\delta x = \lambda^T ADQ_1\delta x = 0. \tag{6.33}$$

Wir haben also die Eigenschaft

Lemma 8 *Für das Optimierungs-Problem mit dem speziellen Kosten-Funktional sei $\lambda_* \in C^1_{A^T}([t_0,T],\mathbb{R}^m)$ Lösung des Endwert-Problems (EWP). Dann gilt für jede Variation $\delta x : [t_0,T] \to \mathbb{R}^m$ der optimalen Trajektorie*

$$\lambda_*^T BT\delta x = 0 \tag{6.34}$$

und

$$\lambda_*^T ADQ_1\delta x = 0. \tag{6.35}$$

Beweis der notwendigen Optimalitäts-Bedingung

Mit der Hamilton-Funktion hatten wir das Funktional J so geschrieben, dass für die Differenz ΔJ zur Berechnung der Gâteaux-Ableitung von $J(u)$ nach Formel (3.10)

$$\begin{aligned}\Delta J &= F_x(x_*(T))\delta(T) + \left[\lambda^T AD\delta x\right]_{t_0}^T \\ &\quad - \int_{t_0}^T \left\{(\lambda^T A)' D\delta x + H_x \delta x + H_u \delta u\right\}\, dt + \mathcal{O}(\|\delta u\|_\infty^2)\end{aligned}$$

gilt.

Mit der Eigenschaft (6.34) aus Lemma 8 und den Eigenschaften des speziellen Kosten-Funktionals haben wir für den Term $H_x\delta x$ aus dieser Darstellung

$$\begin{aligned}H_x\delta x &= -(x_*^T W + u_*^T S^T + \lambda_*^T B)\delta x \\ &= -x_*^T W U\delta x - u_*^T S^T U\delta x - \lambda_*^T BU\delta x \qquad (6.36)\\ &= -\left(x_*^T W + u_*^T S^T + \lambda_*^T B\right) U\delta x.\end{aligned}$$

Da wir hier die nicht-kausale DAE betrachten, haben wir nicht mehr die Eigenschaft (3.12) zur Verfügung. Nach (3.2) ist aber

$$\lambda^T(t_0)A(t_0)D(t_0)P_1(t_0)\delta x(t_0) = 0, \qquad (6.37)$$

das heißt wir haben zusammen mit der Eigenschaft (6.35) aus Lemma 8 trotzdem die Eigenschaft

$$\lambda^T(t_0)A(t_0)D(t_0)\delta x(t_0) = 0. \qquad (6.38)$$

Zur Grenzwertbildung reicht uns also nun die Eigenschaft (6.23) für die
$U - Komponente$ von δx aus. Für $\epsilon \to 0$ haben wir also auch hier die Ableitung (3.13)

$$\begin{aligned}\delta J(u_*, \delta u) &= \left(F_x(x(T)) + \lambda_*^T(T)A(T)D(T)\right)\delta x(T) \\ &\quad - \int_{t_0}^T H_u \delta u\, dt - \int_{t_0}^T \{H_x + (\lambda_*^T A)' D\}\delta x\, dt.\end{aligned}$$

Da λ_* Lösung des Endwert-Problems ist, gilt auch hier (3.15)

$$\delta J(u_*, \delta u) = -\int_{t_0}^{T} H_u \delta u \, dt$$

und mit dem Fundamental-Lemma der Variations-Rechnung folgt aus (3.5) auch hier die Bedingung (3.16)

$$H_u^T(x_*, \lambda_*, u_*, t) = -S^T x_* + C^T \lambda - K u_* = 0.$$

Satz zur notwendigen Optimalitäts-Bedingung

Somit haben wir schließlich einen neuen Satz zur notwendigen Optimalitäts-Bedingung mit konkreteren Voraussetzungen als im Satz 4 aus Abschnitt 3. Die notwendige Optimalitäts-Bedingung für das Optimierungs-Problem mit speziellem Kosten-Funktional gilt für beliebige auch nicht-kausale DAE und die Kausalität der adjungierten Gleichung ist keine explizite Voraussetzung mehr:

Satz 12 *(Notwendige Optimalitäts-Bedingung)*
Für das Optimierungs-Problem gelte $Wz = 0$ *sowie* $S^T z = 0$ *für alle* $z \in N_0 \cap S_0$ *sowie* $Vz = 0$ *für alle* $z \in N_0 \oplus N_1$ *.*

Sei $u_* \in C([t_0, T], \mathbb{R}^k)$ *optimale Steuerung und* $x_* : [t_0, T] \to \mathbb{R}^m$ *die zugehörige optimale Trajektorie. Dann existiert eine Funktion*

$$\lambda_* \in C^1_{A^T}([t_0, T], \mathbb{R}^m),$$

so dass (x_*, λ_*, u_*) *eine Lösung des Randwertproblems*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} A(Dx)' & = & -Bx + Cu \\ D^T(A^T\lambda)' & = & Wx + B^T\lambda + Su \\ 0 & = & S^T x - C^T\lambda + Ku \\ & & \\ D(t_0)P_1(t_0)(x(t_0) - x^0) & = & 0 \\ D^T(T)A^T(T)\lambda(T) & = & -Vx(T) \end{array} \right. \tag{6.39}$$

ist.

Es sei hier noch einmal bemerkt, dass in diesem Satz die optimale Trajektorie x_* nur eine im Allgemeinen unstetige U-Lösung der gesteuerten DAE ist, während λ_* tatsächlich eine klassische stetige Lösung der adjungierten DAE ist.

7 Das Randwert-Problem

Mit der notwendigen Optimalitäts-Bedingung für das optimale Steuerungs-Problem verlagert sich die Bestimmung einer optimalen Steuerung auf die Lösung eines Randwert-Problems für eine neue größere DAE. Es ist daher wichtig zu wissen, welchen Index diese neue DAE und somit welchen Schwierigkeitsgrad die Lösung des Randwertproblems hat.

Betrachten wir zur Index-Bestimmung also die Matrix-Kette der DAE des Randwert-Problems für die DAE in erweiterter Hessenberg-Form. Für den Fall der allgemeinen DAE folgt die Aussage über den Index aus der Invarianz bezüglich der in Abschnitt 5 beschriebenen Transformation und Refaktorisierung der DAE des Randwertproblems. Wir haben

$$\tilde{G}_0 = \begin{pmatrix} I &&&&&& \\ & 0 &&&&& \\ && 0 &&&& \\ &&& I &&& \\ &&&& 0 && \\ &&&&& 0 & \\ &&&&&& 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{Q}_0 = \begin{pmatrix} 0 &&&&&& \\ & I &&&&& \\ && I &&&& \\ &&& 0 &&& \\ &&&& I && \\ &&&&& I & \\ &&&&&& I \end{pmatrix} \tag{7.1}$$

$$\tilde{B} := \begin{pmatrix} B & 0 & -C \\ -W & -B^T & -S \\ S^T & -C^T & K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11} & 0 & B_{13} & 0 & 0 & 0 & -C_1 \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & -C_2 \\ B_{31} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -C_3 \\ -W_{11} & -W_{12} & -W_{13} & -B_{11}^T & 0 & -B_{31}^T & -S_1 \\ -W_{12}^T & -W_{22} & -W_{23} & 0 & -I & 0 & -S_2 \\ -W_{13}^T & -W_{23}^T & -W_{33} & -B_{13}^T & 0 & 0 & -S_3 \\ S_1^T & S_2^T & S_3^T & -C_1^T & -C_2^T & -C_3^T & K \end{pmatrix} \tag{7.2}$$

und damit

$$\tilde{G}_1 = \begin{pmatrix} I & 0 & B_{13} & 0 & 0 & 0 & -C_1 \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & -C_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -C_3 \\ 0 & -W_{12} & -W_{13} & I & 0 & -B_{31}^T & -S_1 \\ 0 & -W_{22} & -W_{23} & 0 & -I & 0 & -S_2 \\ 0 & -W_{23}^T & -W_{33} & 0 & 0 & 0 & -S_3 \\ 0 & S_2^T & S_3^T & 0 & -C_2^T & -C_3^T & K \end{pmatrix}. \tag{7.3}$$

Betrachten wir nun das spezielle Kosten-Funktional, so verschwinden in $\tilde{G}_1$ wegen $WT = 0$ und $S^T T = 0$ einige Einträge und es bleibt übrig

$$\tilde{G}_1 = \begin{pmatrix} I & 0 & B_{13} & 0 & 0 & 0 & -C_1 \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & -C_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -C_3 \\ 0 & -W_{12} & 0 & I & 0 & -B_{31}^T & -S_1 \\ 0 & -W_{22} & 0 & 0 & -I & 0 & -S_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_2^T & 0 & 0 & -C_2^T & -C_3^T & K \end{pmatrix}. \tag{7.4}$$

An der Nullzeile in $\tilde{G}_1$ können wir ablesen, dass $\tilde{G}_1$ nicht regulär sein kann und damit haben wir:

Satz 13 *Wenn im Optimierungs-Problem mit dem speziellen Kosten-Funktional die DAE mindestens Index 2 hat, so kann die DAE des Randwert-Problems keine reguläre DAE mit Index 1 sein.*

Dieser Satz verbietet also die Möglichkeit, im Fall des speziellen Kosten-Funktionals im Randwert-Problem eine DAE mit Index 1 zu erhalten. Umgekehrt bedeutet dies, dass der Wunsch, im Randwert-Problem eine DAE mit Index 1 zu haben, nur erfüllt werden könnte, wenn das Kosten-Funktional auch die T-Komponente der Zustands-Variablen bewertet. Für diesen Fall haben wir hier jedoch die notwendige Optimalitäts-Bedingung nicht bewiesen.

Literatur

[BaMä] K. Balla und R. März: A Unified approach to linear differential algebraic equations and their adjoint equations. Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen 21(2002)3, 783-802

[BeLa] D. Bender, A.Laub: The linear-quadratic optimal regulator for descriptor systems, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol.32, No.8, 672-688, 1987

[Cobb] D. Cobb: Descriptor variable systems and optimal state regulation, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol.28, No.5, 1983

[He] Hestenes, Magnus R.: Calculus of variations and optimal control theory, New York, 1966

[Jo] E. Jonckheere: Variational Calculus for descriptor problems, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol.33, No.5, 1988

[KuMe1] P. Kunkel, V. Mehrmann: The linear quadratic optimal control problem for linear descriptor systems with variable coefficients, Math. Control of Signals and Systems, Vol.10, No.3, 1997

[KuMe2] P. Kunkel, V. Mehrmann: Smooth factorizations of matrix valued functions and their derivatives, Num. Math. 60, 115-131, Springer 1991

[KuMä] G.A. Kurina und R. März: On linear-quadratic optimal control problems for time-varying descriptor systems. Humboldt-Universität Berlin, Institut für Mathematik, Preprint 2000-10

[Mä1] R. März: Differential algebraic systems anew. Applied Numerial Mathmatics 42(2002), 315-335

[Mä2] R. März: The index of linear differential algebraic equations with properly stated leading terms. Results in Mathmatics 42(2002), 308-338

[Mä3] R. März: Adjoint equations of differential-algebraic systems and optimal control problems, Pro. Belarussian National Academy of Sciences, Institute of Mathematics, Minsk, Vol. 7, 88-97, 2001

[Me] V. Mehrmann: The autonomnous linear quadratic control problem, Lecture Notes in Control and Information Science, 163, Springer-Verlag, 1991

[Mue] P.C. Müller, Kausale und nichtkausale Deskriptorsysteme. Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik 77(1997), Suppl.1, 231-232

[RouVal] T. Roubíček, M. Valášek: Optimal control of causal differential-algebraic systems, J. Math. Anal. Appl. 269(2002), 616-641

[Ti] C. Tischendorf, Solution of Index-2 differential algebraic equations and its application in circuit simulation, thesis, 1996, Humboldt-Universität Berlin